2 ARITMETICKÉ A GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

V této kapitole se budeme věnovat dvěma speciálním typům posloupností: aritmetickým posloupnostem a posloupnostem geometrickým. Uvedeme celou řadu vět o těchto posloupnostech a ukážeme si jejich užití při řešení úloh z různých oblastí běžného života; zvláště se soustředíme na některé problémy finanční matematiky. Při studiu vlastností aritmetických a geometrických posloupností budete mít příležitost zopakovat si některé již dříve získané poznatky o lineárních a exponenciálních funkcích.

2.1 Aritmetická posloupnost

$\boxed{1}$ Rychlost šíření zvuku ve vzduchu při 0 °C je přibližně 331 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. S rostoucí teplotou rychlost zvuku spojitě a rovnoměrně roste; přitom při vzrůstu teploty o 1 °C se rychlost vždy zvýší o 0,6 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká je rychlost zvuku při 5 °C?

Označíme v_n ($n \in \mathsf{N}$) číslo vyjadřující číselnou hodnotu rychlosti zvuku v $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ při teplotě $(n-1)$ °C. Pak je

$$\begin{array}{lllr}
\text{při } 0\,°\text{C} \ldots & v_1 = 331 & & \\
\text{při } 1\,°\text{C} \ldots & \boxed{v_2 = v_1 + 0{,}6} & = & 331 + 1 \cdot 0{,}6 \\
\text{při } 2\,°\text{C} \ldots & \boxed{v_3 = v_2 + 0{,}6} & = v_1 + 2 \cdot 0{,}6 = & 331 + 2 \cdot 0{,}6 \\
\text{při } 3\,°\text{C} \ldots & \boxed{v_4 = v_3 + 0{,}6} & = v_1 + 3 \cdot 0{,}6 = & 331 + 3 \cdot 0{,}6 \\
\text{při } 4\,°\text{C} \ldots & \boxed{v_5 = v_4 + 0{,}6} & = v_1 + 4 \cdot 0{,}6 = & 331 + 4 \cdot 0{,}6 \\
\text{při } 5\,°\text{C} \ldots & \boxed{v_6 = v_5 + 0{,}6} & = v_1 + 5 \cdot 0{,}6 = & 331 + 5 \cdot 0{,}6
\end{array}$$

Rychlost zvuku ve vzduchu při 5 °C je přibližně 334 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Seznámili jsme se s prvními členy posloupnosti, pro kterou platí: Každý její člen počínaje druhým získáme tak, že k předchozímu členu přičteme číslo 0,6. Jinak řečeno, rozdíl každých dvou bezprostředně po sobě následujících členů této posloupnosti je konstantní. Zkoumaná posloupnost je příkladem *aritmetické posloupnosti.*

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá **diference** aritmetické posloupnosti.

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tedy pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Tím je vysvětlena volba názvu *diference* pro d.

Příklad 1

Dokažte, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = 2n - 4$, je aritmetická. Určete její diferenci.

Řešení

Naším úkolem je dokázat existenci takového čísla $d \in \mathsf{R}$, aby pro všechna $n \in \mathsf{N}$ platilo $a_{n+1} = a_n + d$.

V uvažované posloupnosti je

$$a_n = 2n - 4,$$
$$a_{n+1} = 2(n+1) - 4 = 2n - 2,$$

a tedy

$$a_{n+1} - a_n = 2,$$

čili

$$a_{n+1} = a_n + 2.$$

Posloupnost $(2n-4)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, její diference $d = 2$.

Aritmetická posloupnost je zadána rekurentně. Dokázali bychom ji určit též vzorcem pro n-tý člen?

$\boxed{2}$ Vraťte se k $\boxed{1}$ a pokuste se vyjádřit v_n pomocí v_1, n a diference $d = 0{,}6$.

$$v_n = v_1 + (n-1) \cdot 0{,}6$$

$\boxed{3}$ Zkuste vyslovit hypotézu o vyjádření n-tého členu aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pomocí vzorce, s užitím a_1, n a d.

Dokážeme tuto větu:

- **V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro každé** $n \in \mathrm{N}$
$$a_n = a_1 + (n-1)d. \qquad (1)$$

Důkaz matematickou indukcí

1. Dokážeme, že věta platí pro $n = 1$. Do výrazu $a_1 + (n-1)d$ dosadíme za n číslo 1: $a_1 + (1-1)d = a_1$. Vztah (1) je pro číslo 1 splněn.
2. Dokážeme, že pro každé $k \in \mathrm{N}$ platí:

   Je-li
   $$a_k = a_1 + (k-1)d, \qquad (2)$$
   pak
   $$a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d,$$
   čili
   $$a_{k+1} = a_1 + kd.$$
   Podle definice aritmetické posloupnosti je
   $$a_{k+1} = a_k + d.$$
   Dosadíme-li do tohoto vztahu za a_k z (2), dostaneme:
   $$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$$

Tím je důkaz proveden.

Snadno lze dokázat větu, která uvádí vztah mezi r-tým a s-tým členem aritmetické posloupnosti:

- **V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro všechna $r, s \in \mathrm{N}$**
$$a_s = a_r + (s-r)d. \qquad (3)$$

Důkaz. Podle předchozí věty je
$$a_s = a_1 + (s-1)d,$$
$$a_r = a_1 + (r-1)d,$$
a tedy
$$a_s - a_r = (s-r)d,$$
čili
$$a_s = a_r + (s-r)d.$$

Poznámka. Vzorec (3) je zobecněním vzorce (1): Jestliže ve vzorci (3) zvolíme $s = n$, $r = 1$, dostaneme vzorec (1).

Příklad 2

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $a_3 = 5$, $a_8 = 15$. Určete diferenci d a členy a_1, a_{17}.

Řešení

Podle (3) platí
$$a_8 = a_3 + (8-3)d,$$
čili
$$15 = 5 + 5d;$$
odtud dostáváme
$$d = 2.$$
Podle (1) je dále
$$a_3 = a_1 + 2d,$$
a tedy
$$a_1 = a_3 - 2d = 1.$$
Opět podle (1) je
$$a_{17} = a_1 + 16d = 33.$$
V dané posloupnosti je $d = 2$, $a_1 = 1$, $a_{17} = 33$.

Poznámka. Příklad 2 můžeme vyřešit i bez použití (3). Podle (1) je

$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_8 = a_1 + 7d,$$

čili

$$5 = a_1 + 2d,$$
$$15 = a_1 + 7d.$$

Vyřešíme získanou soustavu lineárních rovnic s neznámými $a_1, d \in \mathsf{R}$:

$$15 = 5 - 2d + 7d$$
$$10 = 5d$$
$$d = 2$$

Dále z první rovnice soustavy dostaneme $a_1 = 5 - 2d = 5 - 4 = 1$. Člen a_{17} vypočítáme stejným způsobem jako při předchozí metodě řešení.

O slavném německém matematikovi K. F. Gaussovi se vypráví tento příběh. Když byl Gauss malým žáčkem, zadal jeho učitel při hodině matematiky namáhavý a dlouhý úkol: vypočítat součet všech přirozených čísel od 1 do 100. Žák Gauss prý ale vzápětí prohlásil: „Je to 5 050.“

Ukážeme si, jak asi Gauss při řešení úlohy postupoval; využijeme při tom svých znalostí o posloupnostech.

Příklad 3

Určete součet prvních 100 členů posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení

Posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, její první člen je 1, diference $d = 1$. Naším úkolem je najít číslo

$$s_{100} = 1 + 2 + \ldots + 99 + 100. \qquad (4)$$

Napíšeme sčítance z (4) v opačném pořadí:

$$100 + 99 + \ldots + 2 + 1 \qquad (5)$$

Z (4) a (5) dostaneme

$$2 \cdot s_{100} = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (99 + 2) + (100 + 1).$$

Na pravé straně tohoto vztahu se vyskytuje 100 sčítanců, z nichž každý je roven číslu 101. Odtud plyne

$$2 \cdot s_{100} = 100 \cdot 101,$$

a tedy

$$s_{100} = \tfrac{100}{2} \cdot 101 = 5\,050.$$

Všimněte si, že číslo 100 vyjadřuje počet členů posloupnosti, které sčítáme, číslo 101 je rovno součtu $a_k + a_m$ těch členů uvažované posloupnosti, pro něž je $k + m = 101$ (tj. např. $a_1 + a_{100}$, $a_2 + a_{99}$ atd.).

$\boxed{4}$ Zkuste vyslovit hypotézu o součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. o $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Platí věta:

- **Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. pro $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, platí**

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Důkaz. Budeme postupovat analogicky jako při určování s_{100} v příkladu 3.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} + \ldots + a_n & 0 \leqq k \leqq n-1,\\ s_n &= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + \ldots + a_1 & 0 \leqq k \leqq n-1;\\ 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{k+1} + a_{n-k}) + \\ &\quad + \ldots + (a_n + a_1) \end{aligned} \qquad (6)$$

Platí:

$$a_{k+1} = a_1 + kd$$
$$a_{n-k} = a_n + ((n-k) - n)d = a_n - kd$$

Je tedy

$$a_{k+1} + a_{n-k} = (a_1 + kd) + (a_n - kd) = a_1 + a_n.$$

Odtud plyne, že každý z n sčítanců v (6) je roven $a_1 + a_n$. Můžeme proto psát

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n),$$
$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Pro srovnání si ještě ukážeme, jak bychom mohli uvedenou větu dokázat matematickou indukcí.

1. Dokážeme, že věta platí pro $n = 1$:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_1) = a_1$$

2. Dokážeme, že pro každé $k \in \mathsf{N}$ platí:

Je-li

$$s_k = \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k),$$

pak

$$s_{k+1} = \frac{k+1}{2} \cdot (a_1 + a_{k+1}).$$

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k) + a_{k+1}$$

Vyjádříme a_k pomocí k, a_1 a a_{k+1}. K tomu využijeme vztahy

$$a_k = a_{k+1} - d,$$
$$a_{k+1} = a_1 + kd,$$

čili

$$d = \frac{a_{k+1} - a_1}{k}.$$

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_{k+1} - d) + a_{k+1} = \\ &= \frac{k}{2} \cdot \left(a_1 + a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_1}{k}\right) + a_{k+1} = \\ &= \frac{k}{2} \cdot a_1 + \frac{k}{2} \cdot a_{k+1} - \frac{k}{2} \cdot \frac{a_{k+1} - a_1}{k} + a_{k+1} = \\ &= \frac{k}{2} \cdot a_1 + \frac{k}{2} \cdot a_{k+1} - \frac{a_{k+1}}{2} + \frac{a_1}{2} + a_{k+1} = \\ &= \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot a_1 + \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) \cdot a_{k+1} = \\ &= \frac{k+1}{2} \cdot (a_1 + a_{k+1}) \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

Příklad 4

Vypočítejte součet všech sudých trojciferných přirozených čísel.

Řešení

Máme určit součet čísel 100, 102, 104, …, 996, 998, tj. vypočítat

$$100 + 102 + 104 + \ldots + 996 + 998.$$

Rozdíl mezi každými dvěma po sobě následujícími sčítanci je 2. To nás vede k myšlence, že pro určení hledaného součtu bychom mohli užít vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, tj. vzorec

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

První ze sčítanců je 100, tedy $a_1 = 100$, poslední je 998, čili $a_n = 998$. Ale čemu je rovno n?

Zde opět můžeme užít své znalosti o aritmetické posloupnosti, konkrétně vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Známe a_1, a_n i d, neznámá je n:

$$\begin{aligned} 998 &= 100 + (n-1)\cdot 2 \\ (n-1)\cdot 2 &= 898 \\ n-1 &= 449 \\ n &= 450 \end{aligned}$$

A nyní můžeme vypočítat s_{450}:

$$\begin{aligned} s_{450} &= \tfrac{450}{2}\cdot(100+998) \\ s_{450} &= 247\,050 \end{aligned}$$

Součet všech sudých trojciferných přirozených čísel je 247 050.

Úlohy

2.1 Rozhodněte, která z čísel 71, 100 jsou členy aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž je $a_1 = -10$, $d = 4{,}5$.

2.2 Vypište prvních osm členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_1 = 4$, $d = -1$ b) $a_1 = 0{,}5$, $d = 3$
c) $a_5 = 6$, $d = 2$ d) $a_5 = 7$, $a_9 = 11$

*2.3 Vraťte se k příkladu 2 z článku 1.2 a přečtěte si pozorně jeho řešení. Zkuste pak obdobným způsobem dokázat větu o vyjádření n-tého členu aritmetické posloupnosti vzorcem ($a_n = a_1 + (n-1)d$).

2.4 Určete součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí:

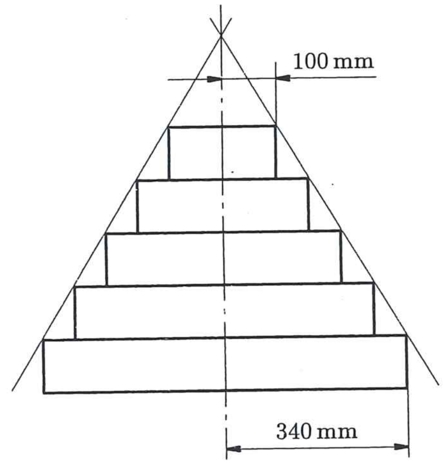
a) $a_1 = 6$, $a_{12} = 28$ b) $a_1 = 0$, $d = 1{,}5$
c) $a_1 = 2$, $a_8 = -19$ d) $a_4 = 7$, $a_8 = -1$

2.5 Oč je větší součet prvních 100 přirozených čísel sudých než součet prvních 100 přirozených čísel lichých?

2.6 Vypočítejte součet všech dvojciferných přirozených čísel.

Úlohy

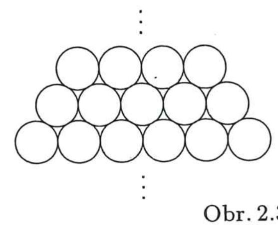
2.11 Pětistupňový kotouč pro převody rychlosti (viz obr. 2.2) má mít krajní poloměry 100 mm a 340 mm. Vypočtěte poloměry zbývajících stupňů. (Tloušťky všech stupňů se sobě rovnají.)



Obr. 2.2

2.12 Dělník obsluhuje 16 poloautomatických tkalcovských stavů. Výkon každého stavu je s metrů látky za jednu hodinu. První stav uvede dělník do chodu na začátku směny, každý další uvádí do činnosti vždy po dvou minutách. Kolik metrů látky vyrobí dělník na každém stavu v první hodině směny? Kolik metrů látky vyrobí za první hodinu celkem? (Nepředpokládáme poruchy stavů.)

2.13 Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy (viz obr. 2.3). Do kolika vrstev se složí 90 rour, jsou-li v nejhořejší vrstvě 2 roury? Kolik rour je v nejspodnější vrstvě?



Obr. 2.3