Vážení matematici, zasílám poslední opakování pro tento školní rok. Chybí nám opakování logaritmických rovnic a celek goniometrie. Vše je obsahem semináře v dalším ročníku. V závěru máte úkol na ověření uvedených vlastností. Pro příští opakovací týden vám předám k vypracování testové úlohy. Zdraví Vaš.

Logaritmická funkce

je inverzní funkce k funkci exponenciální

$$\boldsymbol{f: y = a^x \Rightarrow f^{-1}: x = a^y \Rightarrow y = \log_a x}$$

$$a > 1 \quad f\ je\ rostoucí$$

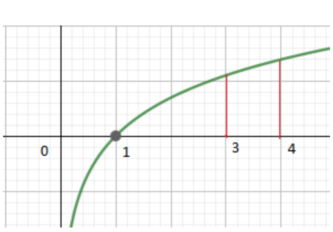
$$0 < a < 1 \quad f\ je\ klesající$$

$$[1; 0]$$

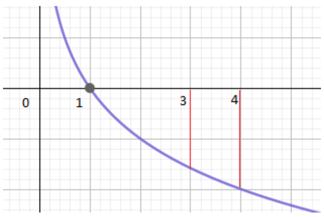
$$D(f) = (0; \infty)$$

1. Rozhodněte pomocí vhodného grafu logaritmické funkce, zda platí:
   $\log_4 3 > \log_4 4$

   $\log_{0,5} 3 < \log_{0,5} 4$



A



N

2. Určete definiční obor funkce
   a) $y = \log_3(x-2) \Rightarrow pro\ definiční\ obor\ platí\ x - 2 > 0$
   b) $y = \log(x^2-4) \Rightarrow pro\ definiční\ obor\ platí\ x^2 - 4 > 0$
   c) $y = \frac{1}{\log(x+1)} \Rightarrow pro\ definiční\ obor\ platí\ x + 1 > 0 \wedge \log(x+1) \neq 0$
   d) $y = \frac{1}{\log_3(2x+3)} pro\ definiční\ obor\ platí\ 2x + 3 > 0 \wedge \log_3(2x+3) \neq 0$
   e) $y = \frac{1}{\log_2 x - 1} pro\ definiční\ obor\ platí\ x > 0 \wedge \log_2 x - 1 \neq 0$
   f) $y = \log\frac{x}{x+3}\ pro\ definiční\ obor\ platí\ \frac{x}{x+3} > 0$
   g) $y = \log(|x+2|-3)\ pro\ definiční\ obor\ platí\ |x+2| - 3 > 0$

Jestliže dořešíte uvedené podmínky, můžete si zopakovat řešení nerovnic:

$$\left[(2;\infty); (-\infty;-2) \cup (2;\infty); (-1;\infty) - \{0\}; \left(-\frac{3}{2};\infty\right) - \{-1\}; (0;\infty) - \{2\}; (-\infty;-3) \cup (0;\infty); (-\infty;-5) \cup (1;\infty)\right]$$

Logaritmus

čísla x je číslo y, kterým umocníme základ a a dostaneme logaritmované číslo x.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Určete a ověřte pomocí kalkulačky:

- *pokud na kalkulačce máte pouze dekadický logaritmus – ozn.* $\log x$ *– požijte vztah*

$$\boldsymbol{log_a x = \frac{log_z x}{log_z a}; z\ je\ libovolně\ zvnolený\ základ,} \qquad \boldsymbol{pro\ z = 10 \Rightarrow \frac{log\, x}{log\, a}}$$

- *přirozený logaritmus* $\ln x = \log_e x; e = Eulerova\ konstanta$

$\log 10 =$

$\log_2 4 =$

$\log_3 27 =$

$\log_2 \frac{1}{2} =$

$\log_4 \frac{1}{64} =$

$\log_{0,1} 10 =$

$\log \frac{1}{100} =$

$\log_4 2 =$

$\log_{\frac{1}{9}} 3 =$

$\log_{\sqrt{7}} 7^2 =$

$\log_4 \sqrt[3]{2} =$

$\log_4 0{,}25 =$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} =$

$\log_2 \sqrt{2} =$

$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$\log_2 \sqrt[2]{4} =$

$\log 1000 =$

$\log_{0,01} 10000 =$

$\log_5 \frac{1}{125} =$

$\log 0{,}1 =$

$\log_{\sqrt{2}} 16 =$

$\log 1 =$

$\ln e =$

$$\left[1; 2; 3; -1; -3; -1; -2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 4; \frac{1}{6}; -1; 3; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; 3; -2; -3; -1; 8; 0; 1\right]$$

Určete $x \in (0; \infty)$

$\log_3 x = 2, x =$

$\log_4 x = -1, x =$

$\log_2 x = -3, x =$

$\log_4 x = \frac{1}{2}, x =$

$\log x = 2, x =$

$\log_{0,1} x = 1, x =$

$\log_{16} x = -\frac{1}{2}, x =$

$\log x = 0, x =$

$$\left[9; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; 2; 0{,}1; \frac{1}{4}; 1\right]$$

Pravidla propočítání s logaritmy (MFCh tabulky)
Příklad:

a) Určete $\log x$, je-li:
$x = a^3 \cdot b;\ \log x = 3 \cdot \log a + \log b$
$x = \sqrt[4]{a^5}; \log x = \dfrac{5}{4} \log a$
$x = (a+b)^2; \log x = 2\log(a+b)$
$x = 3a^5 \cdot \sqrt{b}; \log_3 x = \log_3 3 + 5\log_3 a + \dfrac{1}{2}\log_3 b = 1 + 5\log_3 a + \dfrac{1}{2}\log_3 b$

b) Určete logaritmované číslo x, je-li:
$\log x = \dfrac{1}{2}\log a + 3\log b - \log c\,;\ x = \dfrac{\sqrt{a} \cdot b^3}{c}$
$\log x = 3\log a - 2\log b - 1\,;\ x = \dfrac{a^3}{10 \cdot b^2}$
$\log x = 2(\log a + \log b) - \log(a+b)\,; x = \dfrac{(a \cdot b)^2}{a+b}$
$\log_2 x = 2\log_2 a - 4(\log_2 a + \log_2 b) + 3;\ x = \dfrac{8a^2}{(a \cdot b)^4}$

Úkol 6 (pošlete pouze výsledky):

1. Vypočítejte pomocí kalkulačky:
   a) $\log_4 \frac{1}{256} - \log 10 + \log_3 243 =$
   b) $\frac{\log_2 16 - 3^{\log_4 4}}{\log 0{,}1} =$
   c) $\log 0{,}001 \cdot \log_3 9 - \log_3 \frac{1}{9} =$
   d) $\log_2 \log_2 4 =$
   e) $\log_5 \frac{1}{25} - \left(\log_{\frac{1}{3}} 9\right)^2 =$
2. Vypočítejte užitím pravidel pro počítání s logaritmy
   a) $\log 1500 - \log 15 =$
   b) $\log_5 10 + \log_5 12{,}5 =$
   c) $\log 25 + \log 40 =$
   d) $\log_4 2 + 3\log_4 8 =$
   e) $\log_6 12 - \log_6 \frac{1}{3} - 2 =$
   f) $\log_4 \frac{3}{20} - \log_4 \frac{3}{5} =$
   g) $2\log 6 + \log 5 - \log 18 =$
   h) $\ln e^2 - 3\ln 1 =$
   i) $2 + \log_3 4 =$
   j) $\left(\log_2 24 + \log_2 \frac{1}{12}\right) 4\log_2 16 =$
   k) $(\log 4 + 2)^2 - (\log 4 + 4)\log 4 =$
   l) $(\log_6 2 + \log_6 3)(\log_5 250 - \log_5 10) =$
   m) $\frac{1}{2}(\log_2 8 - \log_2 3) + \log_2 \sqrt{6} =$
   n) $2^{\log_2 5} =$