1 POSLOUPNOSTI A JEJICH VLASTNOSTI

Tato kapitola, ve které si vysvětlíme, co je to posloupnost, jakými způsoby může být zadána a jakých vlastností může nabývat, velmi úzce souvisí s učivem o funkcích. Proto byste mohli formulovat některé definice a věty o posloupnostech zcela samostatně nebo jen s malou pomocí. Někde se ovšem bez podrobnějšího výkladu neobejdeme; to se týká zejména rekurentního určení posloupnosti a důkazu matematickou indukcí.

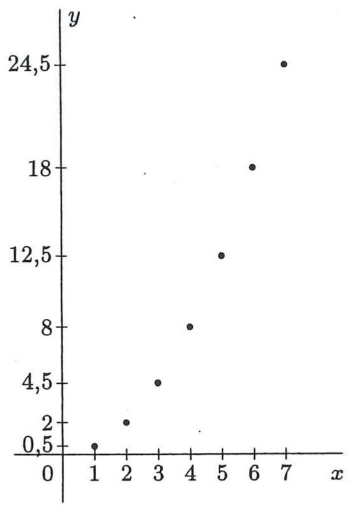
1.1 Pojem posloupnost

$\boxed{1}$ Vyslovte definici funkce. Co je definiční obor funkce?

Funkce na množině A ⊂ R je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo.
Množina A se nazývá **definiční obor funkce**.

$\boxed{2}$ Sestrojte graf funkce $y = 0{,}5\,x^2$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
(Definičním oborem je v našem případě množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.)

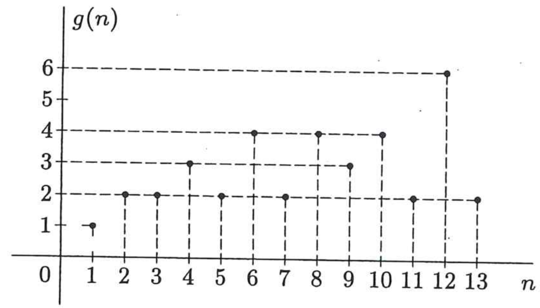
x	1	2	3	4	5	6	7
y	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5



Obr. 1.1

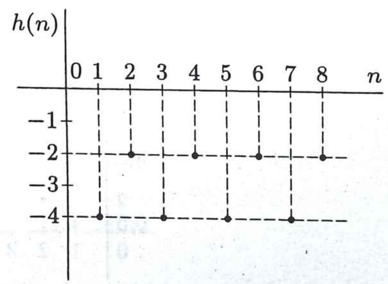
$\boxed{3}$ Funkce g je dána takto: Její definiční obor je množina N všech přirozených čísel. Pro každé $n \in$ N je $g(n)$ rovno počtu všech kladných dělitelů čísla n (mezi dělitele počítáme i čísla 1 a n).
Zapište do tabulky uspořádané dvojice $[n, g(n)]$ pro $n = 1, 2, \dots, 13$ a zobrazte je v soustavě souřadnic.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2



Obr. 1.2

$\boxed{4}$ Je dána funkce h: $y = -3 + (-1)^n$, $n \in$ N. Jejím definičním oborem je množina N. Sestrojte část jejího grafu (s omezením na nákresnu).



Obr. 1.3

Všechny funkce, které jsme zde uvedli, mají jedno společné: jejich definiční obor je vždy částí množiny všech přirozených čísel. Je-li definičním oborem množina všech přirozených čísel, hovoříme o *nekonečných posloupnostech*; je-li definičním oborem množina všech přirozených čísel, která jsou menší nebo rovna jistému pevně danému přirozenému číslu n_0, mluvíme o *konečných posloupnostech*. Funkce g a h z $\boxed{3}$ a $\boxed{4}$ jsou nekonečné posloupnosti, funkce z $\boxed{2}$ je konečná posloupnost.

$\boxed{5}$ Zformulujte definice nekonečné posloupnosti a konečné posloupnosti.

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina N všech přirozených čísel, se nazývá **nekonečná posloupnost**.
Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \leqq n_0$, kde n_0 je pevně dané číslo z N, se nazývá **konečná posloupnost**.

Pokud bude ze souvislosti zřejmé, že pracujeme s konečnou, resp. nekonečnou posloupností, budeme stručněji hovořit pouze o **posloupnosti**.

Vraťme se k posloupnostem z $\boxed{2}$ až $\boxed{4}$ a připomeňme si některé zápisy, které jsme používali pro funkce.

Skutečnost, že hodnota posloupnosti g z $\boxed{3}$ je v bodě 4 rovna 3, jsme zvyklí zapisovat ve tvaru $g(4) = 3$. Pro posloupnosti se však obvykle používá jiný způsob zápisu: $g_4 = 3$ (čteme „*člen g_4 je roven* 3“).

Místo „hodnota posloupnosti f v bodě n je rovna s“ budeme říkat „**n-tý člen posloupnosti f je roven** s“ a psát „$f_n = s$“.

Všimněme si posloupnosti h z $\boxed{4}$. Místo dosud obvykle užívaného zápisu pro funkce, tj.

$$h\colon\ y = -3 + (-1)^n, \quad n \in \mathsf{N},$$

budeme dále zpravidla používat označení

$$\left(-3 + (-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

nebo

$$(h_n)_{n=1}^{\infty}, \quad h_n = -3 + (-1)^n.$$

Tyto nové zápisy čteme „*posloupnost* $-3 + (-1)^n$ *od n rovno* 1 *do nekonečna*“, „*posloupnost h_n, kde n probíhá od* 1 *do nekonečna, a h_n se rovná* $-3 + (-1)^n$“.

Obdobně se zapisuje i konečná posloupnost z $\boxed{2}$:

$$\left(0{,}5\, n^2\right)_{n=1}^{7}$$

V těchto případech říkáme, že **posloupnost je určena vzorcem pro n-tý člen.**

Zůstaňme ještě u konečné posloupnosti z $\boxed{2}$. Její vyjádření tabulkou uvedené v $\boxed{2}$ pod čárou se obvykle zapisuje v následujícím zkráceném tvaru:

$$0{,}5;\ 2;\ 4{,}5;\ 8;\ 12{,}5;\ 18;\ 24{,}5 \tag{1}$$

Jednotlivá čísla v tomto zápisu znamenají postupně 1., 2., ..., 7. člen posloupnosti. V zápisu (1) záleží na pořadí čísel, nelze je libovolně zaměňovat. Zápis

$$0{,}5;\ 8;\ 2;\ 4{,}5;\ 18;\ 12{,}5;\ 24{,}5 \tag{2}$$

obsahuje stejná čísla jako (1), přesto však (1) a (2) označují různé posloupnosti. Např. třetí člen první posloupnosti je 4,5, kdežto třetí člen druhé posloupnosti je 2.

Úlohy

1.1 V dalším textu je v levém sloupci uvedeno několik konečných posloupností daných výčtem svých členů; v pravém sloupci jsou pak tyto posloupnosti určeny vzorcem pro n-tý člen. Překontrolujte, zda v každém řádku skutečně jde o dvojí vyjádření téže posloupnosti.

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	$(n)_{n=1}^{8}$
b) 1, 4, 9, 16, 25	$\left(n^2\right)_{n=1}^{5}$
c) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5	$(5)_{n=1}^{7}$
d) 3, −3, 3, −3, 3, −3, 3, −3, 3, −3	$\left((-1)^{n+1}\cdot 3\right)_{n=1}^{10}$
e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$	$\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{5}$

1.2 Napište prvních pět členů posloupnosti dané vzorcem pro n-tý člen:

a) $(3n)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(0{,}5+0{,}5\cdot(-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $((n-1)n)_{n=1}^{\infty}$

e) $\left((-1)^n\cdot\frac{1}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\sin\frac{\pi}{2}n\right)_{n=1}^{\infty}$

1.3 Napište prvních deset členů nekonečné posloupnosti k, která je dána takto: $k(n) = 0$ v případě, že n je prvočíslo, $k(n) = 1$ pro případy, kdy n není prvočíslo (číslo 1 nepočítáme mezi prvočísla).

1.4 Je dána posloupnost $\left(n^2+2n+1\right)_{n=1}^{\infty}$. Rozhodněte, která z čísel 223, 289, 361, 1 000 jsou členy této posloupnosti.

1.5 Vyjádřete dané konečné posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ b) 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1

c) 54, −18, 6, −2, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{9}$ d) 1, 8, 27, 64, 125, 216

$^{+}$1.6 V nekonečné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je pro každé sudé číslo n $a_n = 8$, pro každé liché číslo n platí $a_n = 0$. Zapište tuto posloupnost pomocí vzorce pro n-tý člen.

1.2 Rekurentní určení posloupnosti

$\boxed{1}$ Vypočítejte druhý, třetí a čtvrtý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána takto:

$$a_1 = 4$$
$$a_{n+1} = -2a_n \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathsf{N}$$

$$a_2 = -2a_1 = -8, \qquad a_3 = -2a_2 = 16, \qquad a_4 = -2a_3 = -32$$

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dán první člen a dále je k dispozici vzorec, pomocí něhož můžeme pro každé $n \in \mathsf{N}$ vypočítat člen a_{n+1} na základě znalosti předchozího členu.

$\boxed{2}$ Vypočítejte pátý člen posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána takto:

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = -1$$
$$b_{n+2} = 2b_{n+1} - 3b_n \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathsf{N}$$

$$b_3 = 2b_2 - 3b_1 = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -5$$
$$b_4 = 2b_3 - 3b_2 = 2\cdot(-5) - 3\cdot(-1) = -7$$
$$b_5 = 2b_4 - 3b_3 = 2\cdot(-7) - 3\cdot(-5) = 1$$

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány první dva její členy a vzorec, podle kterého vypočítáváme b_{n+2} na základě znalosti členů b_{n+1} a b_n.

Takovýto způsob zadání posloupností jako v $\boxed{1}$ a $\boxed{2}$ se často vyskytuje. Říkáme, že **posloupnost je určena rekurentně** (z latinského *recurrere*, což znamená *vraceti se, jíti zpět*).

Příklad 1

Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \log 3^n$. Vyjádřete ji rekurentně.

Řešení

Pro každé $n \in \mathsf{N}$ je

$$a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log(3^n \cdot 3) = \log 3^n + \log 3 = a_n + \log 3.$$

Zkoumanou posloupnost lze tedy zadat rekurentně takto:

$$a_1 = \log 3; \qquad a_{n+1} = a_n + \log 3$$

Můžeme ji ovšem vyjádřit např. i tímto způsobem:

$$a_1 = \log 3, \quad a_2 = \log 9; \qquad a_{n+2} = a_n + \log 9$$

Příklad 2

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena rekurentně takto: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, $n \in \mathsf{N}$. Vyjádřete ji vzorcem pro n-tý člen.

Řešení

Platí:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= 2a_2 \\ a_4 &= 2a_3 \\ &\dots \\ a_{n-1} &= 2a_{n-2} \\ a_n &= 2a_{n-1} \end{aligned}$$

Těchto $n-1$ rovností mezi sebou vynásobíme a dostaneme

$$a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n = 2a_1 \cdot 2a_2 \cdot 2a_3 \cdot \ldots \cdot 2a_{n-2} \cdot 2a_{n-1}$$

čili

$$a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n = 2^{n-1} \cdot a_1\, a_2\, a_3 \dots a_{n-2}\, a_{n-1}.$$

Žádný člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není roven nule. Proto můžeme obě strany poslední rovnosti vydělit výrazem $a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-2}\, a_{n-1}$ a dostaneme vztah pro a_n:

$$a_n = 2^{n-1} a_1$$

Víme, že $a_1 = 1$, a tedy

$$a_n = 2^{n-1}.$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zapíšeme pomocí vzorce pro n-tý člen takto:

$$\left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

$\boxed{5}$ Vypočítejte šestý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ z příkladu 2. Je pro tento výpočet vhodnější rekurentní určení posloupnosti nebo vyjádření vzorcem pro n-tý člen?

$$a_6 = 32$$

Nevýhodou rekurentního určení posloupnosti je to, že libovolný člen posloupnosti můžeme určit jen tehdy, známe-li její předcházející členy.

Úlohy

1.7 Najděte vždy prvních pět členů posloupnosti určené rekurentně:
a) $a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 3a_n, \; n \in \mathsf{N}$
b) $a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}, \; n \in \mathsf{N}$
c) $a_1 = 1, a_2 = 1; \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \; n \in \mathsf{N}$
d) $a_1 = 0, a_2 = 1; \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n, \; n \in \mathsf{N}$

1.8 Určete první člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí: $a_4 = 7$ a dále pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je $a_{n+1} = a_n - 3$.

1.9 Posloupnosti vyjádřené vzorcem pro n-tý člen určete rekurentně:
a) $(1)_{n=1}^{\infty}$ b) $(n)_{n=1}^{\infty}$ c) $(\log 10^n)_{n=1}^{\infty}$
+d) $(n(n+1))_{n=1}^{\infty}$ +e) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ +f) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

1.10 Dané posloupnosti jsou určeny rekurentně. Vyjádřete je vzorcem pro n-tý člen:
a) $a_1 = 1; \; a_{n+1} = a_n, \; n \in \mathsf{N}$ b) $a_1 = 1; \; a_{n+1} = -a_n, \; n \in \mathsf{N}$

1.3 Některé vlastnosti posloupností

$\boxed{1}$ Vyslovte definice rostoucí funkce a klesající funkce.

Funkce f se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in \mathsf{D}_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkce f se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in \mathsf{D}_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Víme, že konečná i nekonečná posloupnost je speciálním případem funkce. V dalším textu se omezíme jenom na studium nekonečných posloupností.

$\boxed{2}$ S užitím definice rostoucí (klesající) funkce zkuste sami zformulovat definici rostoucí (klesající) posloupnosti. Užijte při tom symboly pro posloupnosti a jejich členy.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $r, s \in \mathsf{N}$ platí: Je-li $r < s$, pak $a_r < a_s$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $r, s \in \mathsf{N}$ platí: Je-li $r < s$, pak $a_r > a_s$.

Vyslovíme nyní věty, které bývají velmi užitečné při zjišťování, zda posloupnost je rostoucí, resp. klesající.

- a) **Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, právě když pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je $a_n < a_{n+1}$.**
- b) **Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, právě když pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je $a_n > a_{n+1}$.**

Příklad 1

Rozhodněte, které z dále uvedených posloupností jsou rostoucí či klesající:

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}, \; a_n = (-2)^n$ b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}, \; b_n = \dfrac{n}{n+1}$

Řešení

a) $a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = -8$, tedy $a_1 < a_2$ a zároveň $a_2 > a_3$. Odtud již plyne, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není rostoucí ani klesající.

b) Vypíšeme několik prvních členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$: $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_4 = \frac{4}{5}$, $b_5 = \frac{5}{6}$. Pro každé $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí $b_n < b_{n+1}$. Na obr. 1.4 jsou sestrojeny obrazy těchto členů posloupnosti v soustavě souřadnic v rovině. Zdá se, že posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. K tomu je třeba ověřit, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$b_n < b_{n+1},$$

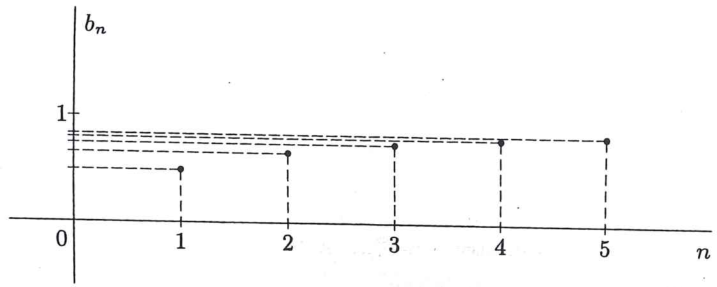
čili

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1}. \qquad (1)$$

Úpravami nerovnosti (1) dostaneme postupně

$$n(n+2) < (n+1)(n+1),$$
$$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1. \qquad (2)$$

Nerovnost (2) je pravdivá pro každé $n \in \mathsf{N}$, přitom (2) platí právě tehdy, když platí (1). Tím jsme ukázali, že posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.



Obr. 1.4

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **neklesající**, právě když pro všechna přirozená čísla r, s platí: Je-li $r < s$, pak $a_r \leqq a_s$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **nerostoucí**, právě když pro všechna přirozená čísla r, s platí: Je-li $r < s$, pak $a_r \geqq a_s$.

Dají se dokázat tyto věty:

- a) **Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, právě když pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je $a_n \leqq a_{n+1}$.**
- b) **Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, právě když pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je $a_n \geqq a_{n+1}$.**

$\boxed{5}$ Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, jejíž graf je na obr. 1.4, je rostoucí. Je tato posloupnost také neklesající nebo nerostoucí?

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost. Pro každé $n \in \mathsf{N}$ je $b_n < b_{n+1}$, a tedy i $b_n \leqq b_{n+1}$.

Platí věty:

- **Každá rostoucí posloupnost je neklesající.**
- **Každá klesající posloupnost je nerostoucí.**

To znamená, že rostoucí posloupnost je speciálním případem neklesající posloupnosti a klesající posloupnost je speciálním případem nerostoucí posloupnosti.

Posloupnosti, které jsou nerostoucí nebo neklesající, se nazývají **monotónní** posloupnosti.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **shora omezená**, právě když existuje reálné číslo h takové, že pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je $a_n \leqq h$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **zdola omezená**, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $n \in \mathsf{N}$ je $a_n \geqq d$.
Posloupnost se nazývá **omezená**, právě když je shora omezená a zdola omezená.

Příklad 2

Zjistěte, které z posloupností

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = \dfrac{n+1}{n}$

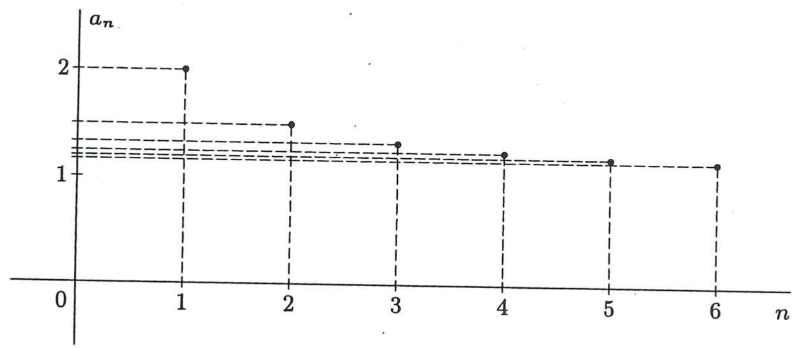
jsou shora omezené, zdola omezené, omezené.

Řešení

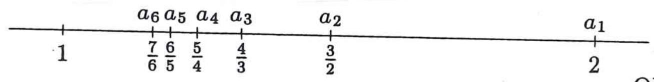
a) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je jistě zdola omezená; pro každé $n \in \mathsf{N}$ je totiž $a_n > 0$.
Obr. 1.7a,b napovídají, že pro každé přirozené číslo n platí $a_n \leqq 2$. Prověříme, zda skutečně je každé $n \in \mathsf{N}$ řešením nerovnice $\dfrac{n+1}{n} \leqq 2$:

$$\frac{n+1}{n} \leqq 2 \quad / \cdot n$$
$$n+1 \leqq 2n$$
$$1 \leqq n$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy i shora omezená.
Závěr: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená.



Obr. 1.7a



Obr. 1.7b

1.12 Rozhodněte, které z dále uvedených posloupností jsou rostoucí, resp. klesající:

a) $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $(3^n)_{n=1}^{\infty}$.

d) $(0{,}8^n)_{n=1}^{\infty}$ e) $(\log_7 n)_{n=1}^{\infty}$ f) $(\log_{0,4} n)_{n=1}^{\infty}$

g) $(\cos \pi n)_{n=1}^{\infty}$ h) $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

1.18 Zobrazte v rovině i na přímce prvních deset členů posloupnosti:

a) $\left(\dfrac{n^2}{2} - 6\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $((-1)^n \cdot n)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Rozhodněte, které z posloupností jsou rostoucí (klesající), omezené (shora omezené, zdola omezené). Svá tvrzení zdůvodněte.

VÝSLEDKY ÚLOH

1 Posloupnosti a jejich vlastnosti

1.2 a) 3, 6, 9, 12, 15; b) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; c) 0, 1, 0, 1, 0; d) 0, 2, 6, 12, 20; e) −1, $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{27}$, $\frac{1}{64}$, $-\frac{1}{125}$; f) 1, 0, −1, 0, 1. **1.3** 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1. **1.4** 289, 361. **1.5** a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{5}$; b) $\left((-1)^{n+1}\right)_{n=1}^{9}$; c) $\left(54\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)_{n=1}^{6}$; d) $(n^3)_{n=1}^{6}$. **1.6** $(4+4\cdot(-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. **1.7** a) 2, 6, 18, 54, 162; b) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$; c) 1, 1, 0, −1, −1; d) 0, 1, 2, 1, −4. **1.8** 16. **1.9** a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n$; b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; c) $a_1 = \log 10$, $a_{n+1} = a_n + \log 10$; d) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+2}{n}$; e) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$; f) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. **1.10** a) $(1)_{n=1}^{\infty}$; b) $\left((-1)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$. **1.12** a) Rostoucí; b) klesající; c) rostoucí; d) klesající; e) rostoucí; f) klesající; g) ani rostoucí, ani klesající; h) klesající. **1.13** Pro $x > 0$ rostoucí, pro $x < 0$ klesající. **1.15** Věta neplatí: např. posloupnost $\left((n-3)^2\right)_{n=1}^{\infty}$ není klesající, a přitom není pravda, že je neklesající. **1.17** $n > 10$, $n > 10^4$. **1.18** a) Rostoucí, zdola omezená, shora není omezená; b) klesající, shora i zdola omezená; c) není ani rostoucí, ani klesající, není ani shora, ani zdola omezená; d) není ani rostoucí, ani klesající, je shora i zdola omezená.