Exponenciální funkce

o základu $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^{+}$ je funkce na množině R vyjádřená ve tvaru

$$\boldsymbol{y = a^x, a > 0 \wedge a \neq 1.}$$

$$\boldsymbol{D(f) = R}$$

$$\boldsymbol{H(f) = (0; \infty)}$$

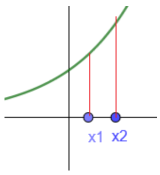
$$[\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}]$$

$$\boldsymbol{a > 1 \ldots rostouc}í$$

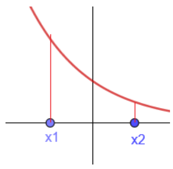
$$\boldsymbol{0 < a < 1 \ldots klesaj}í\boldsymbol{c}í$$

Příklad:

1. Porovnejte užitím vhodného grafu exponenciální funkce čísla
   a) $3000^{\sqrt{202}}$ $\quad$ $3000^{\sqrt{303}}$
   b) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-120}$ $\quad$ $\left(\frac{2}{7}\right)^{130}$



$3000^{\sqrt{202}} < 3000^{\sqrt{303}}$

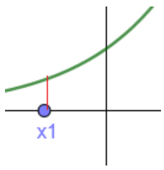


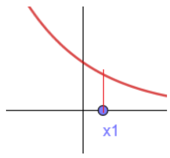
$\left(\frac{2}{7}\right)^{-120} > \left(\frac{2}{7}\right)^{130}$

2. Porovnejte užitím vhodného grafu exponenciální funkce mocniny s hodnotou 1
   a) $\sqrt{2}^{-3561}$
   b) $\left(\frac{356}{57894}\right)^{0,64}$

$\sqrt{2}^{-3561} < 1$

$\left(\frac{356}{57894}\right)^{0,64} < 1$





3. Určete všechna $a \in R$, pro něž je funkce $f: y = \left(\frac{a}{a-2}\right)^x$ rostoucí.

$$\frac{a}{a-2} > 1 \Rightarrow a \in (2; \infty)$$

4. Určete všechna $a \in R$, pro něž je funkce $f: y = \left(\frac{2a-1}{a-2}\right)^x$ klesající.

$$0 < \frac{2a-1}{a-2} < 1 \Rightarrow a \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

Exponenciální rovnice *(Sbírka Janečka 143 – 145)*

- porovnání základů
- vytýkání
- substituce
- logaritmování

Řešte v R exponenciální rovnice:

1. Porovnání základů
   a) $2^x = 64$ $\qquad$ P = R
   $2^x = 2^6$
   $x = 6$ $\qquad$ K = {6}
   b) $4^x = \frac{1}{64}$
   c) $10^x = 0,01$
   d) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{343}$
   e) $4^{3x-2} = 256$

f) $2^{-x} = \frac{1}{8}$
g) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3$
h) $2^{x^2-5x+6} = 1$
i) $5^{3x-x^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
j) $2^{3x} \cdot 4^{3x-3} = 8^{2x-1}$
k) $\sqrt{3^x} \cdot (3^{x-1})^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{9^{x-2}}}$
l) $0{,}25^{2-x} = 256 \cdot 2^{-x-3}$
m) $\sqrt[2x+3]{4^{3-x}} = 256$

$[6; -3; -2; 3; 2; 3; -3; (2; 3); (0; 4); 1; (-2; 1); 3; -1]$

2. Vytýkání
 a) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$ $\quad P = R$
 $3^{2x}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81}\right) = 315$
 $3^{2x} \cdot \frac{27 + 9 - 1}{81} = 315$
 $3^{2x} \cdot \frac{35}{81} = 315$
 $3^{2x} = \frac{315 \cdot 81}{35}$
 $3^{2x} = 9 \cdot 81$
 $3^{2x} = 3^6$
 $x = 3$ $\quad K = \{3\}$
 b) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$
 c) $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$
 d) $9^{x+2} + 5 \cdot 9^{x+1} = 14$
 e) $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$

$[3; 9; 3; -1; 2]$

3. Substituce
 a) $4^{2x} - 2 \cdot 4^x - 8 = 0$ $\quad P = R$
 $a = 4^x$
 $a^2 - 2a - 8 = 0$
 $(a - 4)(a + 2) = 0$
 $a_1 = 4, a_2 = -2$
 $4^x = 4$ $\quad 4^x = -2$
 $x = 1$ $\quad K_2 = \emptyset$
 $K_1 = \{1\}$
 b) $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$
 c) $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$
 d) $3^{2x} + 9^{2-x} = 82$

$[1; (0; -2); 2; (0; 2)]$

4. Logaritmování
 a) $2^x = 100$
 $\log 2^x = \log 100$ $\quad \vee \quad$ $\log_2 2^x = \log_2 100$
 $x \cdot \log 2 = 2$ $\quad$ $x \cdot \log_2 2 = \log_2 100$
 $x = \frac{2}{\log 2}$ $\quad$ $x = \log_2 100$
 b) $5^{x+1} = 4$

$\left[\log_2 100\,; \log_5 4 - 1\right]$

Úkol **5 (**řešení odeslat na vasickova@gymkrom.cz**)**:

1. Rozhodněte, zda platí:
   a) $\left(\frac{7}{25}\right)^{-0,5} < 1$
   b) $\left(\frac{6}{11}\right)^{2,3} > \left(\frac{6}{11}\right)^{2,4}$
   c) $0,23^{-\frac{1}{3}} > 0,23^{-\frac{1}{5}}$
   d) $\left(\frac{101}{100}\right)^{1,01} > 1$
   e) $\left(\sqrt{2}\right)^{0,56} < 1$

2. Porovnejte reálná čísla m, n tak, aby platilo
   a) $\left(\sqrt{5} - 1\right)^{m} \geq \left(\sqrt{5} - 1\right)^{n}; pak\ m \ldots n$
   b) $0,98^{m} \leq 0,98^{n}; pak\ m \ldots n$

3. Určete všechna $a \in R$, pro něž je funkce $f: y = \left(\frac{a+3}{2a-1}\right)^{x}$ klesající.