INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Předmět:	*Ročník:*	*Vytvořil:*	*Datum:*
MATEMATIKA	***ČTVRTÝ***	***Mgr. Tomáš MAŇÁK***	***25. srpen 2013***
Název zpracovaného celku:			
STATISTIKA – ZÁKLADNÍ POJMY			

STATISTIKA – ZÁKLADNÍ POJMY

Statistika je věda o metodách sběru (pozorování, měření, vážení, …), zpracování a vyhodnocování statistických údajů.

Statistický soubor – soubor objektů, který prověřujeme (např. skupina studentů).

Statistická jednotka – prvek statistického souboru (např. jeden student). Shodné vlastnosti statistických jednotek umožňují vytvářet statistické soubory. Statistické jednotky vyšetřujeme z hlediska zvoleného znaku nebo několika zvolených znaků.

Rozsah statistického souboru – počet *n* všech prvků statistického souboru (počet všech statistických jednotek).

Statistický znak *x* – společná vlastnost (prvků statistického souboru), kterou prověřujeme (např. známky).

a) **kvantitativní** – dají se vyjádřit číslem (např. známky, výška, hmotnost, počet,…)
b) **kvalitativní** – nelze je vyjádřit číslem (např. muž – žena, povolání, tvar výrobku, …)

Při statistickém šetření vyšetřujeme řadu znaků, které nás zajímají jak každý zvlášť, tak ve vzájemném vztahu. Omezíme se na situace, kdy nás zajímá jediný znak. Výsledkem je seznam jednotek s udáním hodnoty znaku u každé z nich.

Jednotky v seznamu jsou očíslovány: 1,2,3,…n

Hodnoty znaku *x* označujeme: $x_1, x_2, \quad x_n$

U větších souborů může dojít k opakovanému výskytu stejných hodnot statistického znaku *x* a tím znak *x* nabývá jen určitého počtu *r* různých hodnot: $x_1^+ \;, x_2^+ \;,\ldots, x_r^+$

Absolutní četnost n_j **hodnoty znaku** x_j^+ – počet výskytů statistických jednotek se stejnou hodnotou x_j^+ **;** *j = 1, 2, …, r*, tj. počet výskytů dané hodnoty v souboru.

$$\sum_1^r n_j = n$$ počet všech jednotek souboru

součet četností všech možných hodnot znaku

n = rozsah souboru

Relativní četnost p_j **hodnoty znaku** x_j^+ – absolutní četnost n_j hodnoty znaku x_j^+ dělená počtem všech jednotek v souboru (rozsahem souboru). Značí, jaká část souboru má hodnotu znaku x_j^+.

$p_j = \frac{n_j}{n}$, $j = 1; 2; \ldots; r$ často se udává v % $p_j = \frac{n_j}{n}.100$

n_j … absolutní četnost hodnoty znaku x_j^+ n … rozsah souboru

$$\sum_{k=1}^{r} p_j = p_1 + p_2 + \ldots p_k = 1$$

Tabulku nazýváme **rozdělení četností znaku *x***. Přiřazuje hodnotám x_j^+ jejich četnosti n_j.

znak x	x_1^+	x_2^+	…	x_r^+
četnost	n_1	n_2	…	n_r

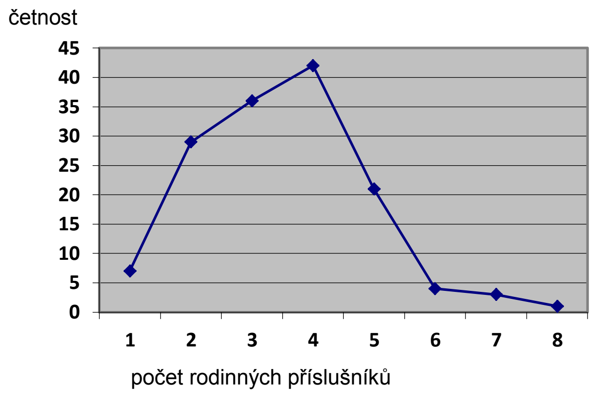
Rozdělení četností znázorňujeme:

a) **spojnicovým diagramem (polygon četností)** – spojení bodů, jejichž první souřadnice je hodnota kvantitativního znaku a druhá souřadnice je odpovídající četnost
b) **sloupkovým diagramem (histogram)** – používá se v případech, kdy hodnoty znaku jsou sdruženy v intervalech. Intervaly tvoří základny sloupků, četnosti udávají výšky sloupků. Kdyby intervaly nebyly stejně dlouhé, musela by být četnostem rovna nikoli výška, ale plošný obsah sloupků.
c) **kruhovým diagramem** – různým hodnotám znaku odpovídají kruhové výseče, jejichž plošné obsahy jsou úměrné četnostem.

Řešený příklad 1:

Seznam 143 členů družstva s údaji o počtu rodinných příslušníků. Ze seznamu lze získat následující rozdělení četností.

počet rodinných příslušníků	1	2	3	4	5	6	7	8
četnost	7	29	36	42	21	4	3	1



spojnicový diagram (polygon četností) znázorňující rozdělení četností

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešený příklad 2:

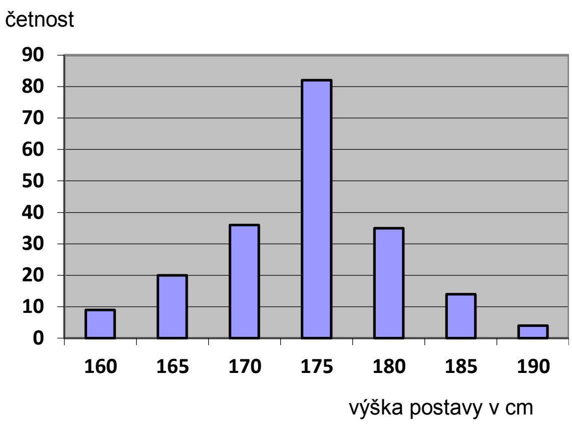
Postupují-li hodnoty kvantitativního znaku po příliš malých krocích, sdružujeme je v intervaly. Hodnoty z téhož intervalu zaokrouhlujeme na střed intervalu. Tabulku rozdělení četností pak můžeme zapsat jedním ze dvou způsobů:

x_j^+	158 – 162	163 – 167	168 – 172	173 – 177	178 – 182	183 – 187	188 – 192
n_j	9	20	36	82	35	14	4

n = 200 (rozsah souboru)

x_j^+	160	165	170	175	180	185	190
n_j	9	20	36	82	35	14	4

n = 200



sloupkový diagram (histogram) znázorňující rozdělení četností

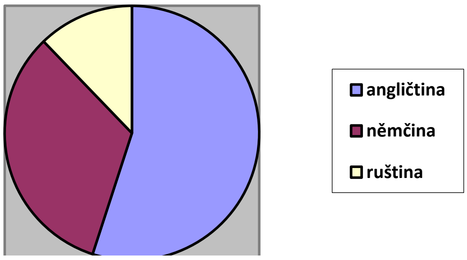
Řešený příklad 3:

Statistickým souborem je 320 žáků školy; znakem je volitelný jazyk: angličtina, němčina, ruština. Rozdělení četností je následující:

jazyk	ANJ	NEJ	RUJ
četnost	176	105	39

Rozdělení četností v procentech.

jazyk	ANJ	NEJ	RUJ
relativní četnost v %	55,0	32,8	12,2



kruhový diagram znázorňující rozdělení četností

výběr volitelného jazyka

Pracovní list A

1) V tabulce je uvedeno rozdělení 200 křesel v PS ČR po volbách v roce 1998. Znázorněte situaci kruhovým diagramem a určete středové úhly jednotlivých výsečí.

ČSSD	ODS	KSČM	KDU – ČSL	US
74	63	24	20	19

2) Statistickým znakem *x* je počet operací, kterým musí výrobek projít. Ve sledovaném podniku se v daném období vyrábí celkem $n = 10$ podobných výrobků. U každého z nich jsme zjistili počet výrobních operací x_j: 2, 3, 3, 2, 1, 4, 5, 4, 3, 3. Uspořádejte tyto údaje do tabulky rozdělení četností. Ověřte, že součet četností n_j dává rozsah souboru *n*. Vypočtěte relativní četnosti a relativní četnosti v %.

3) Při zjišťování počtu nezletilých dětí v dvaceti domácnostech jsme zjistili tyto výsledky: 0,0,2,2,1,1,1,1,1,0,0,0,3,2,1,1,2,3,2,1. Uspořádejte údaje do tabulky rozdělení četností, vypočtěte relativní četnosti a relativní četnosti v %.

4) Ve třídě je 10 žáků s prospěchem od 1 do 1,5, 15žáků s prospěchem od 1,5 do 2, 12 žáků s prospěchem od 2 do 2,5 a 5 žáků s prospěchem od 2,5 do 3. Sestavte tabulku intervalového rozdělení četností prospěchu žáků, četnosti intervalů prospěchu vyjádřete absolutně, relativně a v %.

STATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY:

a) **charakteristiky polohy** – čísla, která charakterizují průměrnou hodnotu sledovaného kvantitativního znaku:

a.	**aritmetický průměr**	$\overline{x}$
b.	**vážený aritmetický průměr**	$\overline{x}_V$
c.	**harmonický průměr**	$\overline{x}_H$
d.	**geometrický průměr**	$\overline{x}_G$
e.	**modus**	*Mod(x)*
f.	**medián**	*Med(x)*

Aritmetický průměr – součet hodnot znaku zjištěný u všech jednotek souboru, dělený počtem všech jednotek souboru. Charakterizuje soubor, jehož hodnoty znaku se navzájem extrémně neliší. Není vhodný v situacích, kdy hodnoty znaku nejsou rovnoměrně rozložené kolem aritmetického průměru a v případech, kdy v souboru jsou extrémně nízké nebo vysoké hodnoty.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Využíváme-li tabulky rozdělení četností, musíme každou hodnotu x_j^+ násobit její četností tj.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{r} x_j^+ . n_j$$

Řešený příklad 4:

Podle údajů řešeného příkladu 2 určete průměrnou výšku postavy.

Řešení:

$$\overline{x} = \frac{160\cdot 9 + 165\cdot 20 + 170\cdot 36 + 175\cdot 82 + 180\cdot 35 + 185\cdot 14 + 190\cdot 4}{200} = \frac{34860}{200} = 174{,}3\,cm$$

Druhý vzorec u aritmetického průměru představuje **vážený aritmetický průměr.** Mluvíme o něj tehdy, mají-li hodnoty x_j^+ četnosti n_j.

$$\overline{x_V} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_j n_j}{n} = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{r} x_j^+ . n_j = \sum_{j=1}^{r} x_j^+ . \frac{n_j}{n} = \sum_{j=1}^{r} x_j^+ . p_j = \frac{\sum_{j=1}^{r} x_j^+ . n_j}{\sum_{j=1}^{r} n_j}$$

p_j je relativní četnost hodnot x_j^+

Řešený příklad 5:

Automobil jede 2 hodiny rychlostí 70 km/h a 3 hodiny rychlostí 90 km/h. Jaká je jeho průměrná rychlost?

Řešení:

Jede-li automobil 2 hodiny rychlostí 70 km/h a 3 hodiny rychlostí 90 km/h, pak jeho průměrná rychlost není aritmetickým průměrem, ale váženým aritmetickým průměrem těchto rychlostí:

$$\overline{x_V} = \frac{3.90 + 2.70}{3+2} = 82 km/h$$

Rozdělíme-li soubor do skupin, pak průměr celého souboru je váženým aritmetickým průměrem skupinových průměrů, přičemž jako četnosti vystupují počty hodnot v jednotlivých skupinách.

$$\overline{x_V} = \frac{\sum_{j=1}^{L} \overline{x_j}.n_j}{\sum_{j=1}^{L} n_j}$$

L … počet skupin
j … pořadové číslo skupiny
$\overline{x_j}$ … průměr j-té skupiny
n_j … četnost j-té skupiny

Řešený příklad 6:

Ve škole jsou čtyři 6. třídy označené A, B, C, D. Počty žáků a průměrné známky z matematiky jsou uvedeny v tabulce. Určete průměrnou známku z matematiky ve všech 6. třídách dohromady.

třída	A	B	C	D
průměrná známka z matematiky	2,21	1,82	2,33	2,11
počet žáků	28	24	32	30

Řešení:

$$\overline{x} = \overline{x_V} = \frac{2{,}21 \cdot 28 + 1{,}82 \cdot 24 + 2{,}33 \cdot 32 + 2{,}11 \cdot 30}{114} = \frac{243{,}42}{114} = 2{,}14$$

Harmonický průměr kladných čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ se používá při výpočtu průměru z poměrných čísel. Rozumí se jím převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot.

$$\overline{x_H} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Řešený příklad 7:

Dva pracovníci provádějí stejnou výrobní operaci. Prvnímu pracovníkovi trvá operace 2 minuty, zatímco druhému 6 minut. Jak dlouho trvá průměrně 1 operace?

Řešení:

1. pracovník provede za 1hodinu 30 operací (60 : 2 = 30)
2. pracovník provede za 1hodinu 10 operací (60 : 6 = 10)

Celkem provedou oba dohromady za 1hodinu 40 operací $\Longrightarrow$ průměrně na každého z nich za 1 hodinu připadá 20 operací $\Longrightarrow$ každému pracovníku trvá v průměru jedna operace **3 minuty** (60 : 20 = 3).

Tj. $\overline{x_H} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 3\min$

V některých národohospodářských oblastech často zjišťujeme průměrné tempo růstu výroby za jedno období. Tím se míní průměr podílů hodnot za dvě po sobě následující období, tedy podílů $z_1 = \frac{x_1}{x_0}, z_2 = \frac{x_2}{x_1}, \ldots, z_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$. Za průměr se pak bere tzv. **geometrický průměr** z kladných hodnot $z_1, z_2, ..., z_n$ kvantitativního znaku

$$\overline{x_G} = \sqrt[n]{z_1.z_2...z_n} = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}}$$

Je-li tempo růstu ve všech obdobích stálé, rovné $\overline{x_G}$, pak se počáteční hodnota změní za n období právě na x_n.

Hodnoty růstu z_i se obvykle udávají v %. Jsou-li např. v pěti po sobě jdoucích letech rovny: 101,3; 108,5; 100,6; 104,2; 102,1. Pak průměrné roční tempo růstu je

$$\overline{x_G} = \sqrt[5]{101{,}3.108{,}5.100{,}6.104{,}2.102{,}1} = 103{,}3$$

Modus – *Mod(x)* je hodnota x_j^+ s největší četností (tj. nejčastěji se vyskytující hodnota mezi x_j^+)

Řešený příklad 8:

Určete modus z řešeného příkladu 1 a 2 (viz výše).

počet rodinných příslušníků	1	2	3	4	5	6	7	8
četnost	7	29	36	42	21	4	3	1

x_j^+	160	165	170	175	180	185	190
n_j	9	20	36	82	35	14	4

Řešení:

Mod(x) = 4 příklad 1
Mod(x) = 175 příklad 2

Medián – *Med(x)* = $x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ ………. je-li *n* liché tj. prostřední člen)

Med(x) = $\frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$ ….je-li *n* sudé (tj. prostřední hodnoty jsou dvě; medián určíme jako jejich aritmetický průměr)

kde $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ jsou hodnoty $x_1, x_2, \; x_n$ uspořádané podle velikosti

Medián se užívá jako charakteristika polohy v souborech, kde hodnoty znaku u některých jednotek extrémně vybočují z řady ostatních hodnot. **Medián je prostřední člen mezi hodnotami x_j^+, jsou-li uspořádány podle velikosti.**

Řešený příklad 9:

Určete medián z řešeného příkladu 1 a 2 (tabulky rozdělení četností naleznete v předchozím řešeném příkladu 8)

Řešení:

Příklad 1…rozsah souboru *n = 143* $\Longrightarrow$ *n* je liché $\Longrightarrow$ *Med(x)* = $x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ $\Longrightarrow$ *Med(x)* = $x_{\left(\frac{143+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{144}{2}\right)} =$

$= x_{(72)} = 3$

Příklad 2…rozsah souboru *n =200* $\Rightarrow$ *n* je sudé $\Rightarrow$ *Med(x)* = $\frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$ $\Rightarrow$ *Med(x)* =

$$= \frac{x_{(100)} + x_{(101)}}{2} = \frac{175+175}{2} = 175$$

POZOR!!! Jednotlivé hodnoty znaku musí být podle velikosti uspořádány vzestupně!

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list B

1) V roce 1980 byla spotřeba zboží 2x vyšší než spotřeba v roce 1979. V roce 1981 byla spotřeba stejného druhu zboží 6x vyšší než v roce 1980. Kolikrát průměrně ročně stoupla spotřeba tohoto druhu zboží?

2) Statistickým souborem je 20 členů družstva, znakem *x* jejich roční příjem (v tis. Kč), s rozdělením četností uvedeným v tabulce. Určete průměrný roční příjem, modus a medián.

roční příjem	80	90	100	110	120	890
četnost	1	6	6	5	1	1

3) Ze 44 žáků je 12 žáků ve věku 17 let, 30 žáků ve věku 18 let, 2 žáci ve věku 19 let. Jaký je průměrný věk žáků?

4) Z 20 dělníků jich 10 provádí práci za 2 minuty, 5 za 5 minut a 5 za 10 minut. Kolik minut připadá na práci průměrně na jednoho dělníka?

5) Za pět let má vzrůst objem výroby o 50 %. O kolik procent musí průměrně ročně růst?

b) **charakteristiky variability (proměnlivosti)** – ukazují, jak se hodnoty znaků liší od zvolené charakteristiky polohy, resp. od sebe navzájem. Každou charakteristiku polohy chápeme jako číslo, kolem něhož jednotlivé hodnoty znaku kolísají. Velikost tohoto kolísání vyjadřují charakteristiky variability znaku.

Patří mezi ně:

a. **směrodatná odchylka**
b. **rozptyl**
c. **vážená forma rozptylu**
d. **variační koeficient**
e. **variační rozpětí**

Směrodatná odchylka s_x je druhá odmocnina z rozptylu. Charakterizuje variabilitu znaku ve stejných jednotkách měření, v jakých jsou uvedeny hodnoty znaku, kdežto rozptyl je vyjádřen v druhých mocninách těchto jednotek.

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{s_x^2}$$

Rozptyl s_x^2 je průměr druhých mocnin odchylek od aritmetického průměru. Je to také směrodatná odchylka umocněná na druhou.

$s_x^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$; po úpravě $s_x^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2} - \bar{x}^2$ vztah vhodnější pro výpočet

resp.

$$s_x^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r}(x_j^+ - \bar{x})^2.n_j = \frac{\sum_{j=1}^{r}(x_j^+ - \bar{x})^2.n_j}{\sum_{j=1}^{r}n_j}$$

tzv. **vážená forma rozptylu** (počítáme-li rozptyl z tabulky rozdělení četností)

po úpravě:

$s_x^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r}x_j^{+2}.n_j - \bar{x}^2$ vztah vhodnější pro výpočet

Variační koeficient v_x používáme, chceme-li charakterizovat variabilitu znaku bezrozměrným číslem. Udává relativní míru variability a slouží ke srovnání variability dvou nebo více souborů v různých měřících jednotkách. Je to podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru. Vyjadřuje se v %.

$s_x^2 = \frac{s_x}{\bar{x}}.100$, $x_{1,2,\ldots,n} \geq 0$, tzn. má smysl jen tehdy, nabývá-li znak x jen nezáporných hodnot.

Variační rozpětí $R = x_{max} - x_{min}$

Korelace – popisuje dvojice znaků a jejich závislosti (např. roční spotřeba alkoholu v jednotlivých státech EU, roční úmrtnost na cirhózu jater). Zajímá nás statistická závislost 2 jevů. Míru závislosti obou znaků určuje **koeficient korelace** r_{xy} .

Znak x a jeho hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$	$\bar{x}$	s_x
Znak y a jeho hodnoty $y_1, y_2, \ldots, y_n$	$\bar{y}$	s_y
	char. polohy	char. variab.

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{s_x.s_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - \bar{x}.\bar{y}}{s_x.s_y} \quad ; \quad r_{xy} \in \langle -1,1 \rangle$$

Čím blíž je hodnota r_{xy} číslu 1, tím je závislost mezi znaky x a y větší.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list C

1) Pro řadu čísel 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8 vypočtěte variační rozpětí, rozptyl, směrodatnou odchylku, modus a medián.

2) Vypočtěte modus a medián údajů v tabulce.

hodnota znaku	četnosti
1	12
2	80
3	14
4	8
5	6

3) Výsledky bodového hodnocení testu v jisté třídě jsou uvedeny ve formě tabulky rozdělení četností. Znázorněte tyto výsledky graficky pomocí:
   a) polygonu četností
   b) histogramu

bodové hodnocení testu	četnost	relativní četnost
0	0	
1	1	
2	4	
3	8	
4	10	
5	10	
6	5	
7	2	
8	0	

4) Jistý autor opakoval 4096krát hod 12 kostkami. V každém hodu zaznamenal počet šestek. Rozdělení četností tohoto znaku udává tabulka. Určete aritmetický průměr, modus, medián, směrodatnou odchylku.

počet šestek	0	1	2	3	4	5	6	7 a více
četnost	447	1 145	1 181	796	380	115	24	8

5) V okrese jsou tři zemědělská družstva a soukromě hospodařící rolníci. V tabulce jsou hektarové výnosy pšenice v t/ha a její sklizňové plochy v ha u všech čtyř subjektů. Jaký byl průměrný hektarový výnos pšenice v okrese?

	ZD1	ZD2	ZD3	soukromníci
výnos	4,9	5,2	4,8	5,4
plocha	640	560	1100	400

6) Stezkou, která vede na vrchol hory, vystupuje turista rychlostí 2,5 km/h, sestupuje rychlostí 5 km/h. Jakou průměrnou rychlostí jde?

7) Tabulka rozdělení četností popisuje soubor 64 837 živě narozených děvčat v ČR v roce 1988 podle porodní délky (v cm). Vypočtěte aritmetický průměr a modus.

porodní délka	četnost	porodní délka	četnost
do 36	149	47 – 48	12 290
37 – 38	104	49 – 50	27 581
39 – 40	262	51 – 52	16 258
41 – 42	376	53 – 54	3 511
43 – 44	913	55 a více	362
45 – 46	3 031		

8) Kontroloři si najali v tentýž den na tutéž cestu postupně 8 vozů taxislužby. Zaplatili tyto částky v Kč: 170, 160, 165, 180, 170, 160, 190, 165.
Vypočtěte aritmetický průměr, modus, medián a směrodatnou odchylku.

9) V tabulce je uvedena hustota obyvatel na 1 km^2 a celková rozloha v km^2 pěti středoevropských států. Jaká je průměrná hustota obyvatel v této části Evropy?

	Polsko	ČR	Slovensko	Rakousko	Maďarsko
hustota	124	131	110	97	110
rozloha	312 700	78 900	49 000	84 900	93 000

10) Podnik vykázal v letech 2000 až 2004 následující čistý zisk (v mil.Kč). Jaké bylo průměrné roční tempo růstu?

2000	2001	2002	2003	2004
1,0	2,5	4,4	9,2	18,0

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.
O. Petránek, E. Calda, P. Hebák: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 4. část, Prometheus 2008
M. Hudcová, L. Kubičíková: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium, Prometheus 2004
E. Calda, V. Dupač: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika, Prometheus 2006
I. Dušek: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN 1988
P. Čermák, P. Červinková: Odmaturuj z matematiky, Didaktis 2002